

# TRANSFORMADA DE FOURIER APLICADA À ANÁLISE ESPECTRAL DE NOTAS E ACORDES MUSICAIS

**Alexandre Carlos da Silva Teixeira**

Universidade Federal de Goiás – Campus de Catalão – Depto. de Matemática – Catalão – GO – Brasil  
alexandre@bol.com.br

**Marcelo H. Stoppa**

Universidade Federal de Goiás – Campus de Catalão – Depto. de Matemática – Catalão – GO – Brasil  
mhstoppa@brturbo.com

**Resumo.** Este trabalho ressalta interação entre a matemática e a música mostrando a aplicabilidade da Transformada de Fourier como ferramenta de análise para identificação de notas fundamentais e suas harmônicas em acordes musicais. É apresentada a formulação teórica da Transformada de Fourier e em seguida, é realizada uma análise espectral de notas e acordes gravados mediante o uso de um teclado arranjador e com o auxílio de um software de análise espectral.

**Palavras-Chave.** Transformada de Fourier, Música, Análise Espectral.

## 1. Introdução

É uma tarefa difícil, ou até mesmo impossível, separar a matemática da música. Imagine por exemplo um simples fato: esticamos cordas de comprimentos diferentes e com um leve toque as fazemos vibrar. Cada uma delas vibra, numa de terminada freqüência e emitem sons diferentes. Consideremos agora, que tenhamos cordas de mesmo comprimento, mas de espessuras (diâmetro da seção transversal) diferentes. Mesmo assim, teremos freqüências e conseqüentemente sons diferentes. Como exemplo, observe o popular violão, onde as cordas têm basicamente os mesmos comprimentos, entre suas extremidades que receberam a fixação, contudo, espessuras diferentes, emitindo sons diferentes quando são dedilhadas.

Esta é apenas uma citação onde podemos perceber claramente a relação entre o som e a matemática, comprimentos, espessuras, freqüências, etc. De maneira geral, ouvimos os sons porque estes são, de forma mais simplificada, vibrações que causam deslocamentos de ar que são dependentes da freqüência dessas vibrações e nossos ouvidos são aparelhos naturais capazes de identificar essas vibrações.

Este trabalho tem a intenção de abordar um pequeno tópico da extensa ligação entre matemática e música, apresentando a transformada inversa de Fourier como ferramenta de análise na identificação de notas fundamentais e suas harmônicas em acordes musicais.

## 2. O Som e as Freqüências

A definição do som depende basicamente de três parâmetros, a freqüência, a intensidade e o timbre. A freqüência é o número de vibrações por segundo que produz o som, a intensidade é o quanto o som é forte ou potente, por exemplo, o som de uma tuba, tem maior intensidade que o de uma flauta doce; o timbre é a característica que identifica o instrumento, permitindo aos ouvidos saber diferenciar quando o som vem de um violão ou de um piano, por exemplo.

Quando se ouve um músico afinar um instrumento, nota-se que em geral, eles tomam por base a nota LA, que tem freqüência múltipla de 220 Hz, ou seja, 220 ciclos de vibração por segundo. Assim, mesmo que ouçamos um violão e um piano emitir a nota LA de 220 Hz, sabemos identificar perfeitamente qual som é do piano e qual é do violão.

O som desta nota (La = 220 Hz, por exemplo) é diferente de um instrumento para outro, porque cada instrumento, quando emite um som, emite também, além da freqüência fundamental, freqüências superiores de ordem par e ordem ímpar em relação à fundamental, ou seja, múltiplos pares de 220 Hz (2 x 220 Hz, 4 x 220 Hz, ...) e múltiplos ímpares de 220 Hz (3 x 220 Hz, 5 x 220 Hz, ...), e o som que ouvimos é uma composição da nota fundamental com estas “harmônicas superiores”. São estas harmônicas que diferenciam as vozes das pessoas, dependentemente das freqüências de vibração das pregas vocais de cada indivíduo, que são específicas de sua constituição física.

Além dessa análise matemática, um outro fator extremamente importante na música é o tempo, ou seja, a duração de cada nota ou de cada intervalo de tempo entre uma nota e outra.

No século XVII, o matemático francês Joseph Fourier (1768-1830) provou que qualquer forma de onda é um somatório de ondas senoidais de diferentes freqüências, amplitudes e fases. Se a onda principal se repete num período T, então as freqüências de cada componente senoidal são múltiplas da freqüência de uma onda chamada **fundamental**.

Considere a onda “**dente de serra**”, no domínio do tempo, dada pela função:

$$y(t) = \text{sen}(2\pi 440t) + \text{sen}(2\pi 880t)/2 + \text{sen}(2\pi 1320t)/3 + \text{sen}(2\pi 1760t)/4 \quad (1)$$

Observamos sua forma na Fig. (1) abaixo:

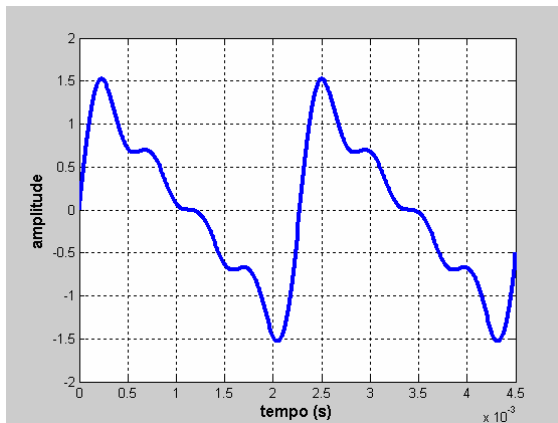


Figura 1. Onda “dente de serra”

De maneira simplificada, quando dizemos “no domínio do tempo” queremos dizer que a onda é analisada num gráfico tempo x amplitude.

Cada uma das parcelas da função dada em (1) é uma senóide, onde a primeira parcela é a **onda fundamental** e as demais parcelas são os **harmônicos**. Na Fig. (2) pode-se observar separadamente cada uma das parcelas da função  $y(t)$ , ou seja, a fundamental e seus harmônicos.

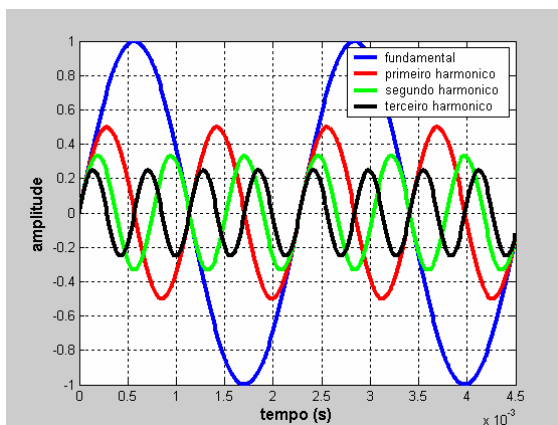


Figura 2. Fundamental e harmônicos

Agora, considerando a mesma frequência fundamental de 440 Hz, mas avaliando apenas os harmônicos de ordem ímpar temos uma **onda quadrada** dada pela função:

$$z(t) = \text{sen}(2\pi 440t) + \text{sen}(2\pi 1320t)/3 + \text{sen}(2\pi 2200t)/5 + \text{sen}(2\pi 3080t)/7 \tag{2}$$

cuja forma é observada na Fig. (3).

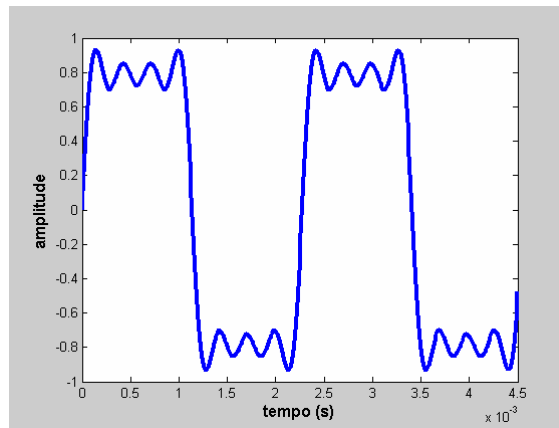


Figura 3. Onda quadrada: fundamental (440Hz) + harmônicos de ordem ímpar

Em resumo, Fourier provou que qualquer onda complexa pode ser descrita como um somatório de sinais senoidais simples com frequências e amplitudes determinadas.

Denotando a frequência por  $f$ , definimos o **período**  $T$  como o inverso da frequência, ou seja,  $T = 1 / f$ . A **velocidade angular**, denotada por  $\omega$ , é definida por:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T \quad (3)$$

Se denotarmos a variável tempo por  $t$ , a expressão:

$$y(t) = \text{sen}(\omega t) \quad (4)$$

determina um **movimento harmônico simples**.

Se considerarmos  $x = \omega t$ , as expressões das ondas dente de serra e quadrada podem ser escritas, respectivamente, como:

$$y(t) = \text{sen}(x) + \text{sen}(2x)/2 + \text{sen}(3x)/3 + \text{sen}(4x)/4 + \text{sen}(5x)/5 + \text{sen}(6x)/6 + \dots \quad (5)$$

e

$$z(t) = \text{sen}(x) + \text{sen}(3x)/3 + \text{sen}(5x)/5 + \text{sen}(7x)/7 + \text{sen}(9x)/9 + \text{sen}(11x)/11 + \dots \quad (6)$$

Quanto mais termos tivermos nestas séries mais perfeita a aproximação das formas de ondas.

### 3. A Transformada de Fourier

Até agora, consideramos apenas a análise no domínio do tempo. Imaginemos então a seguinte situação: temos uma determinada forma de onda complexa e queremos determinar as frequências das senóides que a compõe, ou seja, a fundamental e os possíveis harmônicos.

Para isso, necessitamos fazer uma análise no domínio da frequência e a ferramenta utilizada para isso é a Transformada de Fourier.

A Transformada de Fourier é dada pela expressão:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (7)$$

onde conhecendo a expressão da onda em função do tempo  $t$ , obtemos uma expressão (**complexa**) em função de  $\omega$ , ou seja, função da frequência.

Observe que a imagem da Transformada de Fourier,  $F(\omega)$ , está no conjunto dos números complexos, e portanto pode ser decomposta em parte real e imaginária. Consideremos  $A = \text{Re}(F(\omega))$  e  $B = \text{Im}(F(\omega))$ , respectivamente, as partes real e imaginária de  $F(\omega)$ .

Assim, temos:

$$F(\omega) = A + iB \quad (8)$$

E então, a amplitude ou **espectro da amplitude** do sinal  $f(t)$  é dado por:

$$|F(\omega)| = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (9)$$

O ângulo de fase da Transformada de Fourier  $F(\omega)$ , ou **espectro de fase** do sinal  $f(t)$  é definido por:

$$\theta(t) = \arctan(B/A) \quad (10)$$

Não é intenção deste trabalho descrever a matemática acerca da Transformada de Fourier e sim usá-la apenas como ferramenta de transformação para se obter uma forma equivalente dos sinais no domínio da frequência. Para tanto, usaremos um software analisador de espectros.

#### 4. Avaliação Experimental

Aqui vamos apresentar algumas análises experimentais da Transformada de Fourier aplicadas a ondas emitidas por instrumentos musicais. Utilizamos o software **FFT MuseEV** desenvolvido pelo LSO – Laboratório de Síntese Orgânica do Departamento de Química da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto, da Universidade de São Paulo.

Este programa mostra como a Transformada de Fourier aplicada na análise um som musical complexo (gravado em um arquivo \*.wav), determinando quais as notas musicais (frequências) que estão sendo executadas em um certo trecho. O arquivo \*.wav a ser analisado é mostrado como um gráfico; o som correspondente ao gráfico todo ou a apenas uma parte que pode ser selecionada pelo usuário pode ser ouvido a qualquer momento, permitindo a escolha particular de um determinado intervalo do som. A Transformada de Fourier é apresentada num gráfico logarítmico, e pode ser utilizado um teclado musical virtual ativo, que ao ser acionado, reproduz o som da tecla reproduzindo o som respectivo, permitindo uma análise muito mais interativa do gráfico.

Aqui vamos apresentar a análise de algumas notas de dois instrumentos, uma flauta doce e um teclado arranjador. A flauta doce é uma Yamaha® em DO e um teclado arranjador Yamaha® modelo PSR-170. O som foi digitalizado com um microfone comum. Levando em conta o objetivo deste trabalho que é mostrar a aplicabilidade da Transformada de Fourier na análise espectral de notas e acordes musicais, o som gravado no computador não foi filtrado e maiores cuidados foram desconsiderados uma vez que não havia disponível laboratório acústico apropriado para os testes.

##### 4.1. Notas Fundamentais

Aqui apresentaremos os espectros de notas fundamentais emitidas pela flauta. Pode-se observar nas Figs. (4) a (10), respectivamente, as notas fundamentais DO, RE, MI, FA, SOL, LA e SI.

Note que em cada uma dessas figuras, aparecem picos de frequências múltiplas da frequência fundamental, além de outras frequências que, apesar de amplitude consideravelmente menor que a da nota fundamental, representam outras notas. Estes sinais (ondas) todos somados formam o som final que chega aos nossos ouvidos.

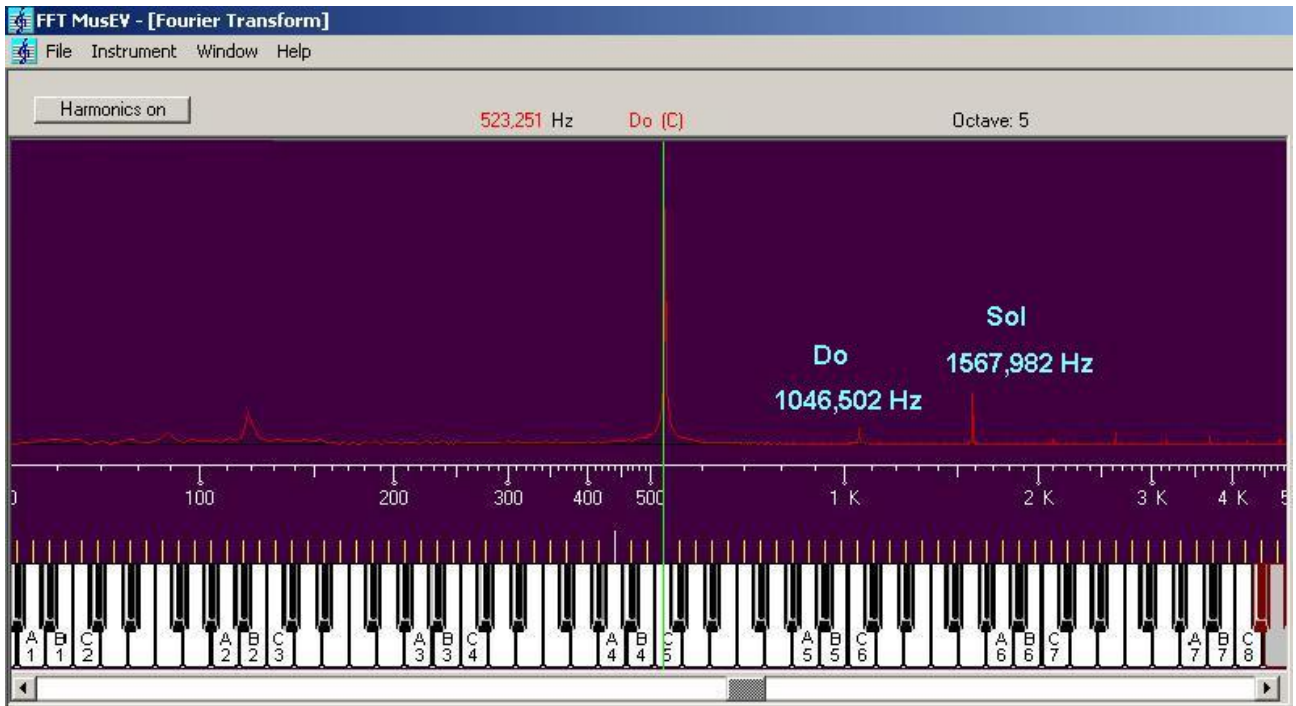


Figura 4. Do – fundamental mais harmônicos

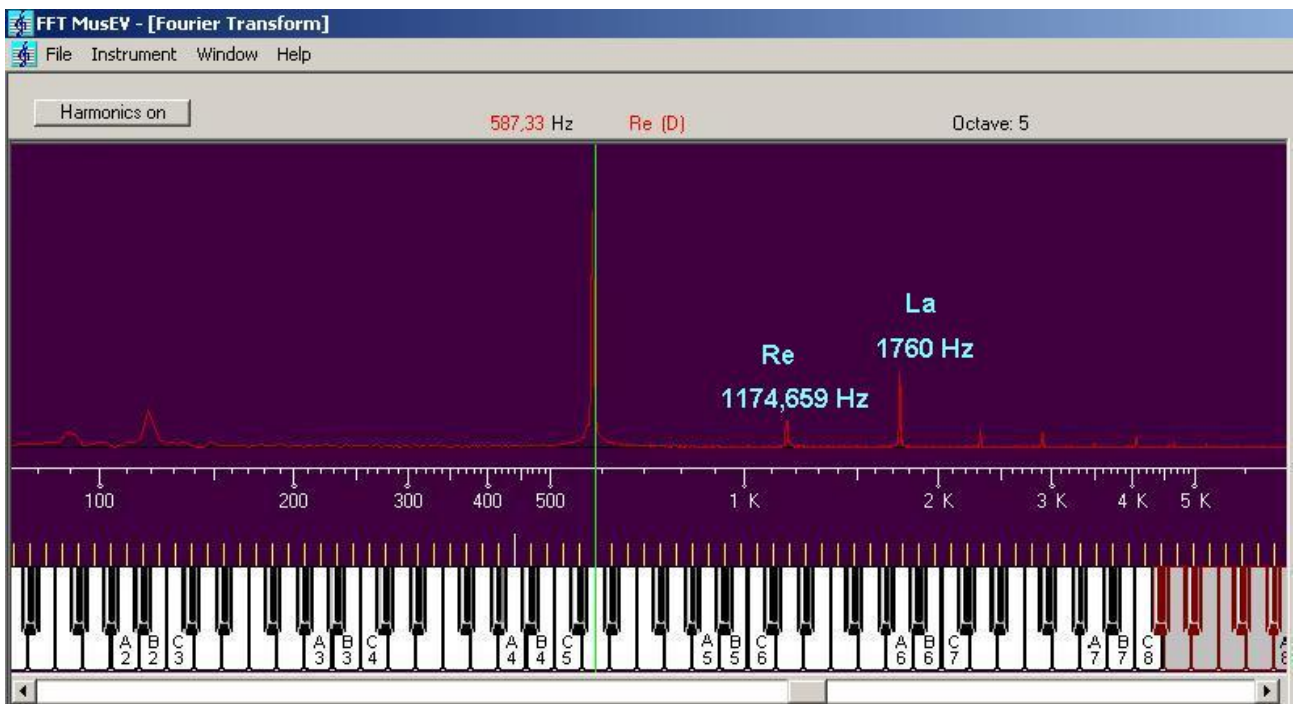


Figura 5. Re – fundamental mais harmônicos

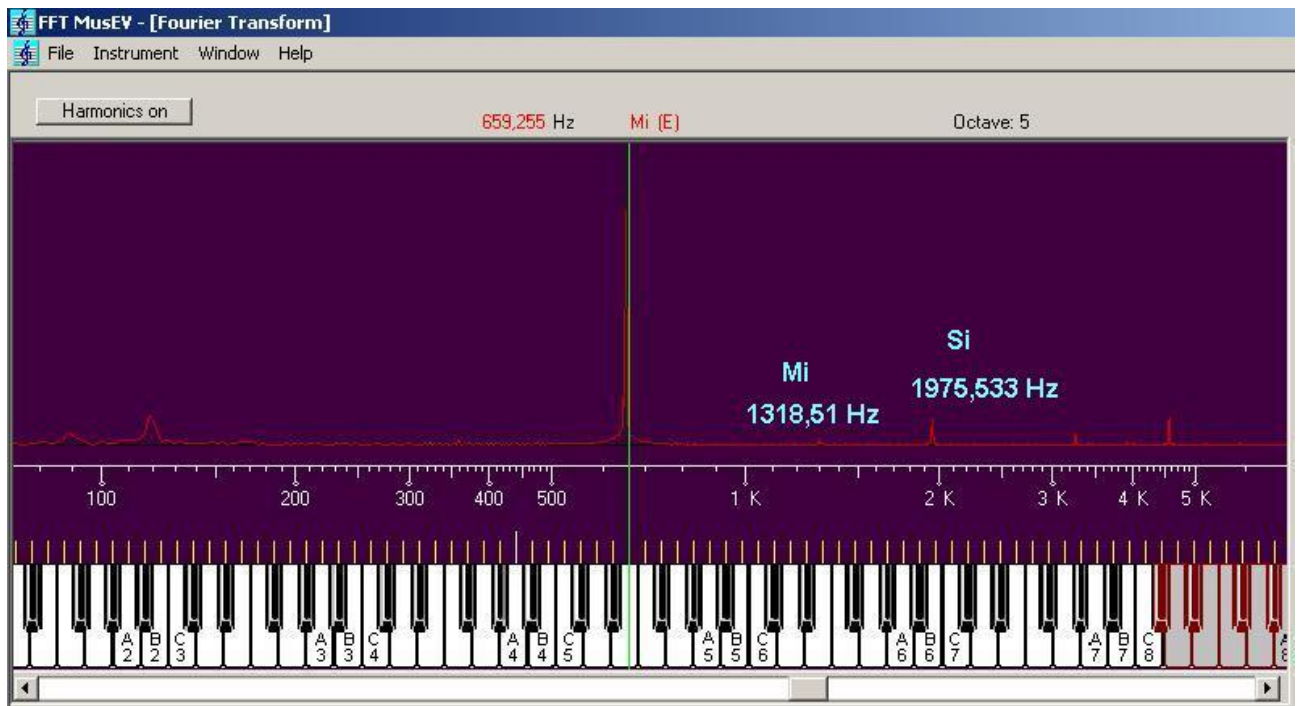


Figura 6. Mi – fundamental mais harmônicos

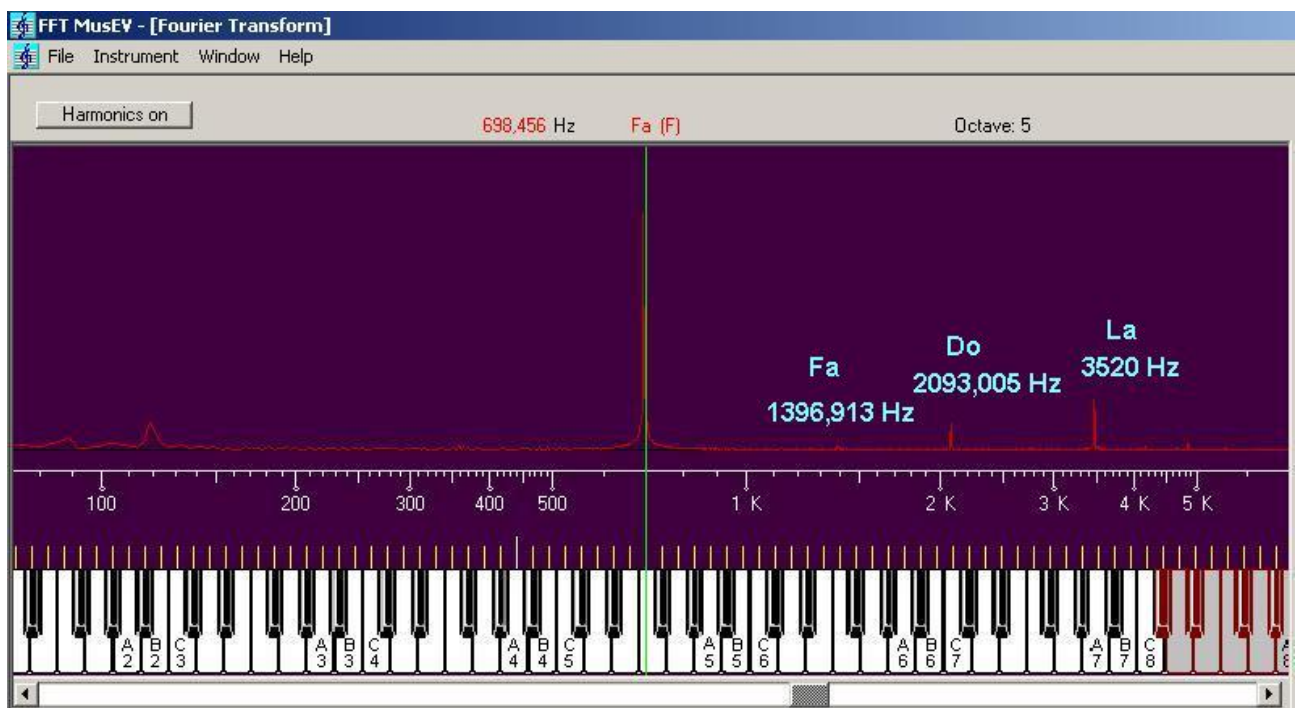


Figura 7. Fa – fundamental mais harmônicos

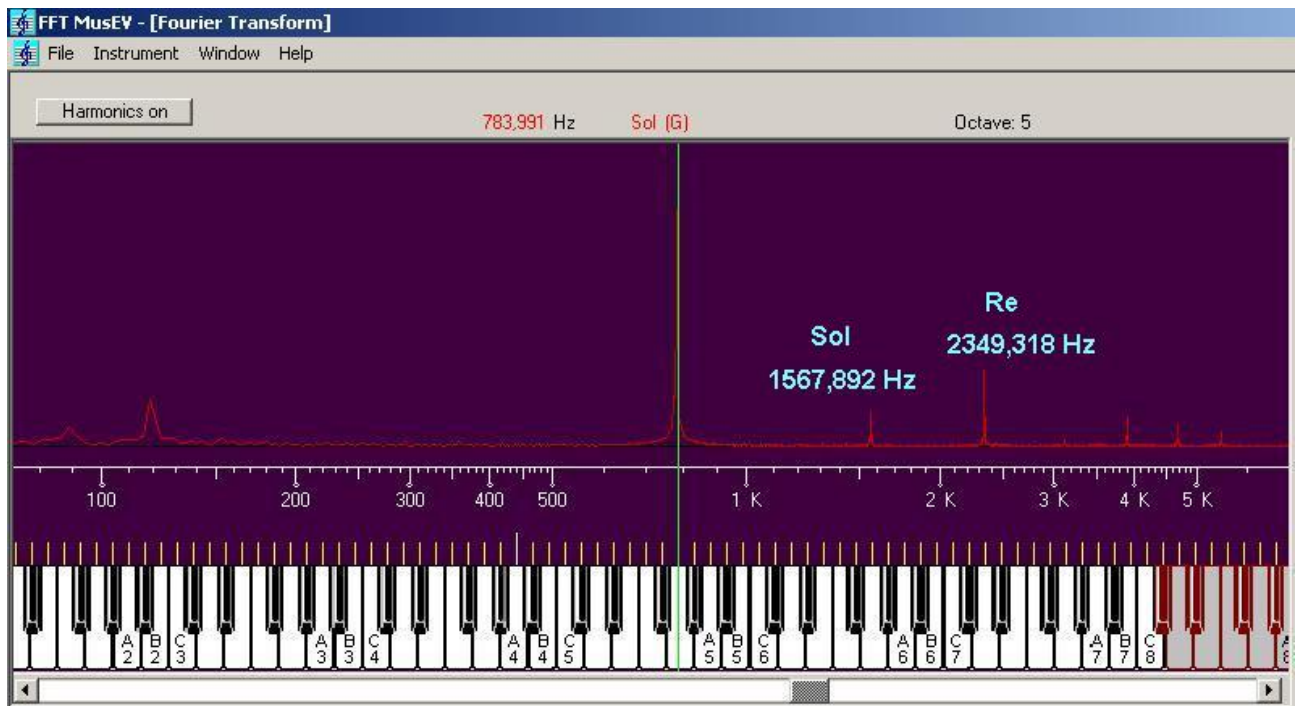


Figura 8. Sol – fundamental mais harmônicos

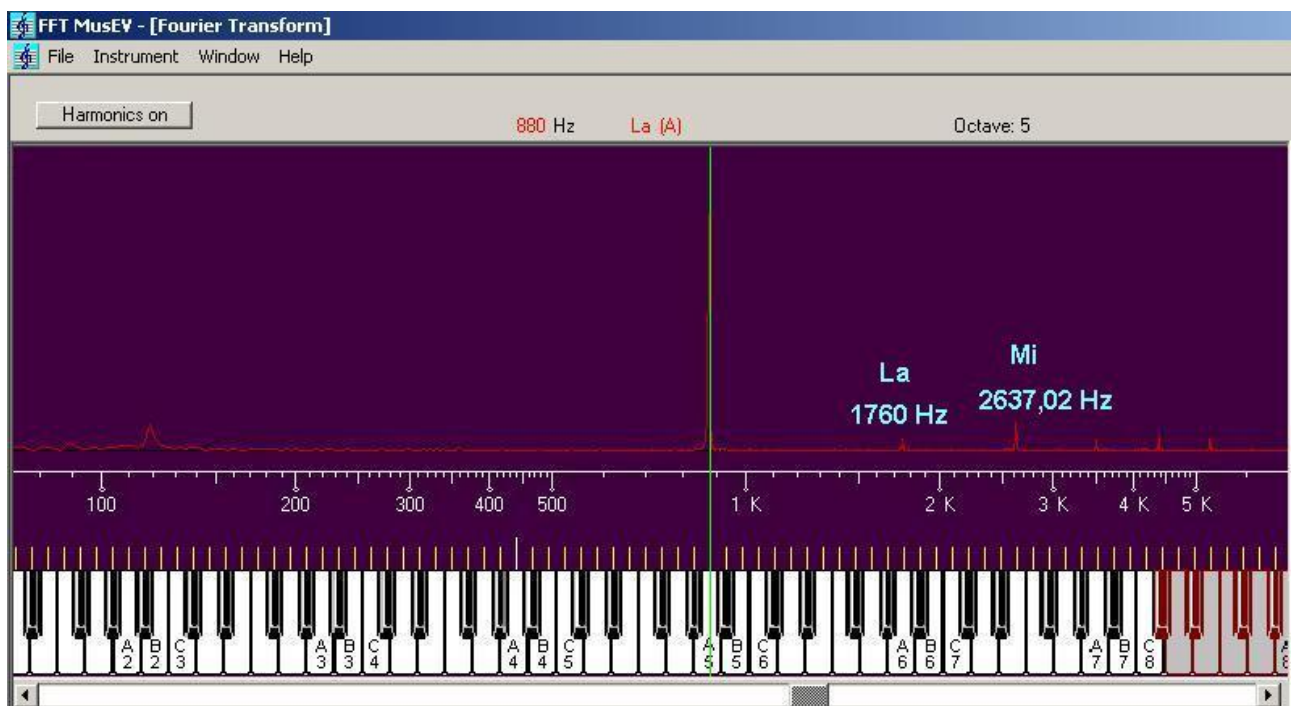


Figura 9. La – fundamental mais harmônicos

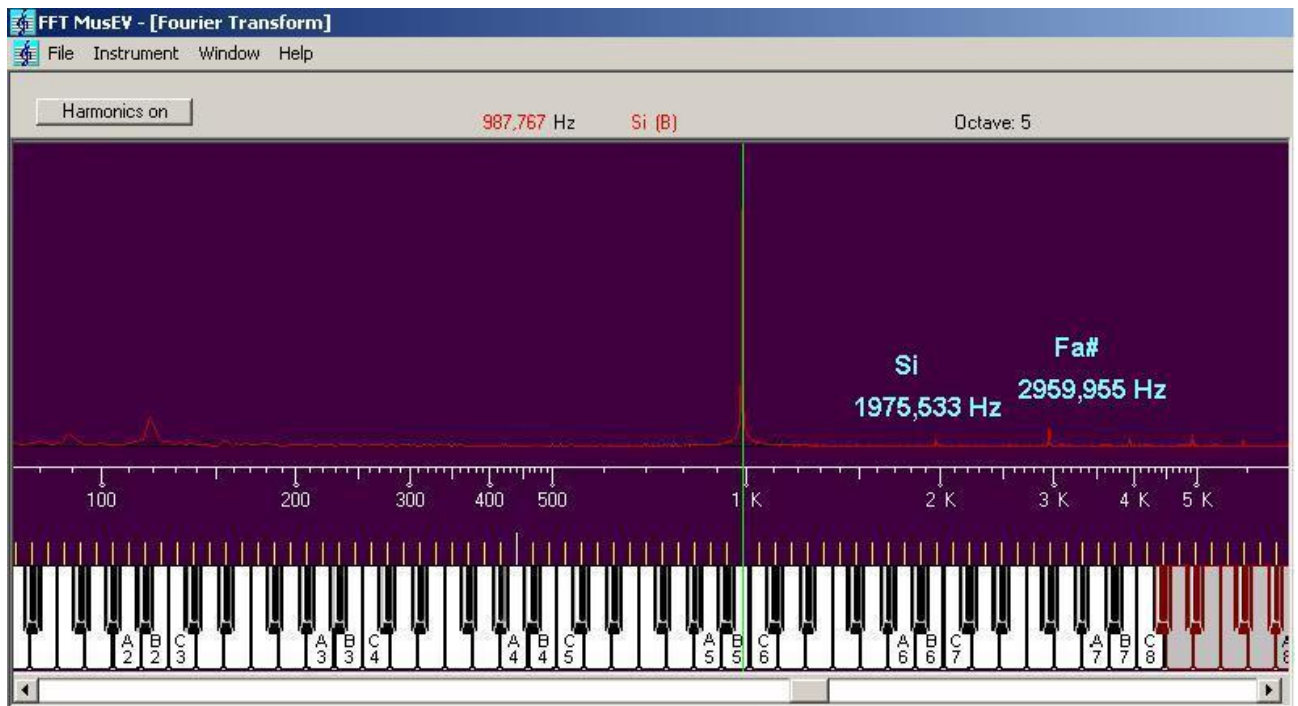


Figura 10. Si – fundamental mais harmônicos

#### 4.2. Acordes

Agora apresentaremos os espectros de notas fundamentais que compõem acordes básicos. Para tanto foi utilizado o teclado arranjador PSR-170. Observa-se nas Figs. (11) a (13), respectivamente, os espectros dos acordes de DO, RE e MI maiores. As notas fundamentais que formam os acordes são dadas na Tab. (1) abaixo:

acordes	DO maior	RE maior	MI maior
notas fundamentais	DO – MI – SOL	RE – FA# – LA	MI – SOL# – SI

Tabela 1. Acordes DO, RE e MI maiores

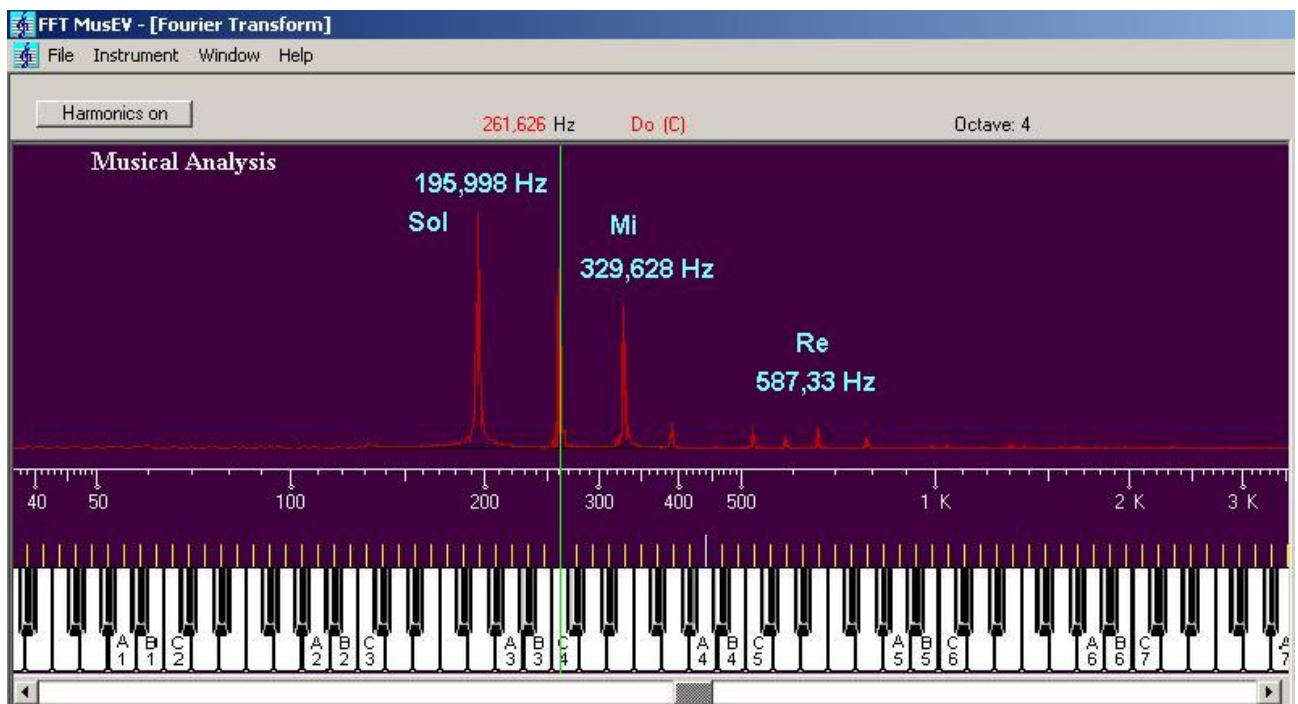


Figura 11. DO maior e harmônicos

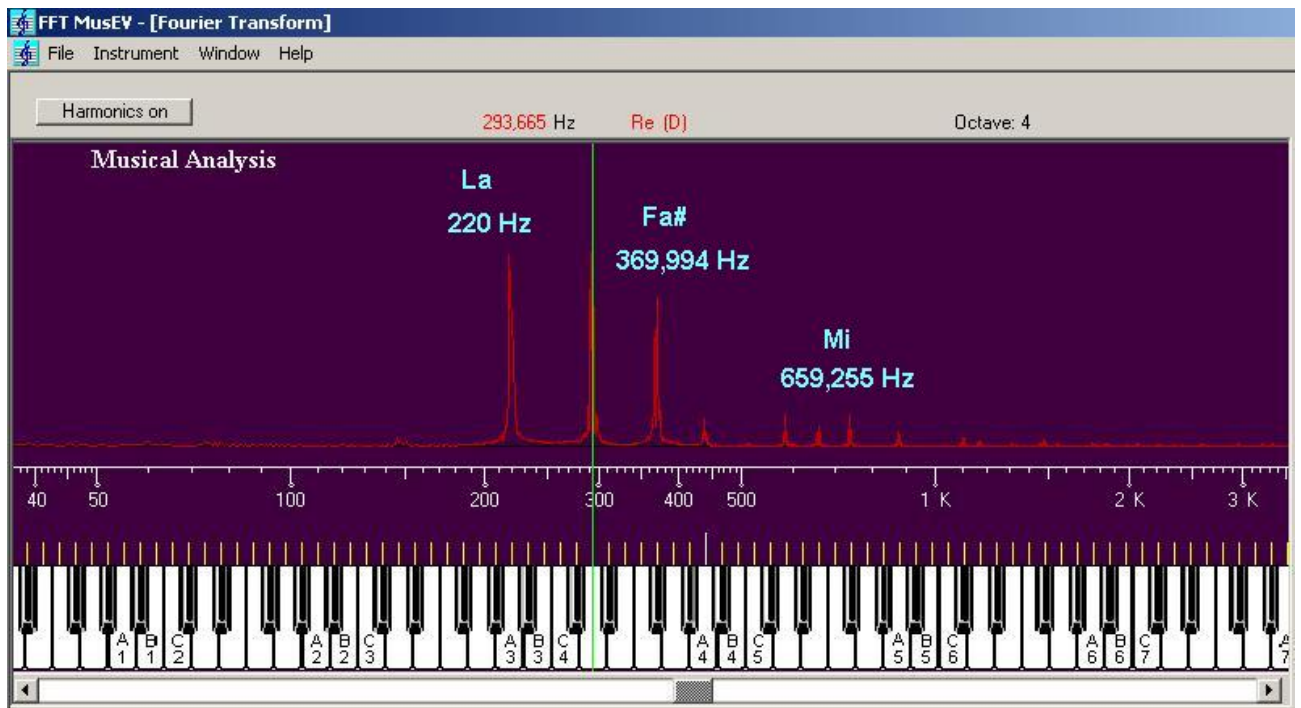


Figura 12. RE maior e harmônicos

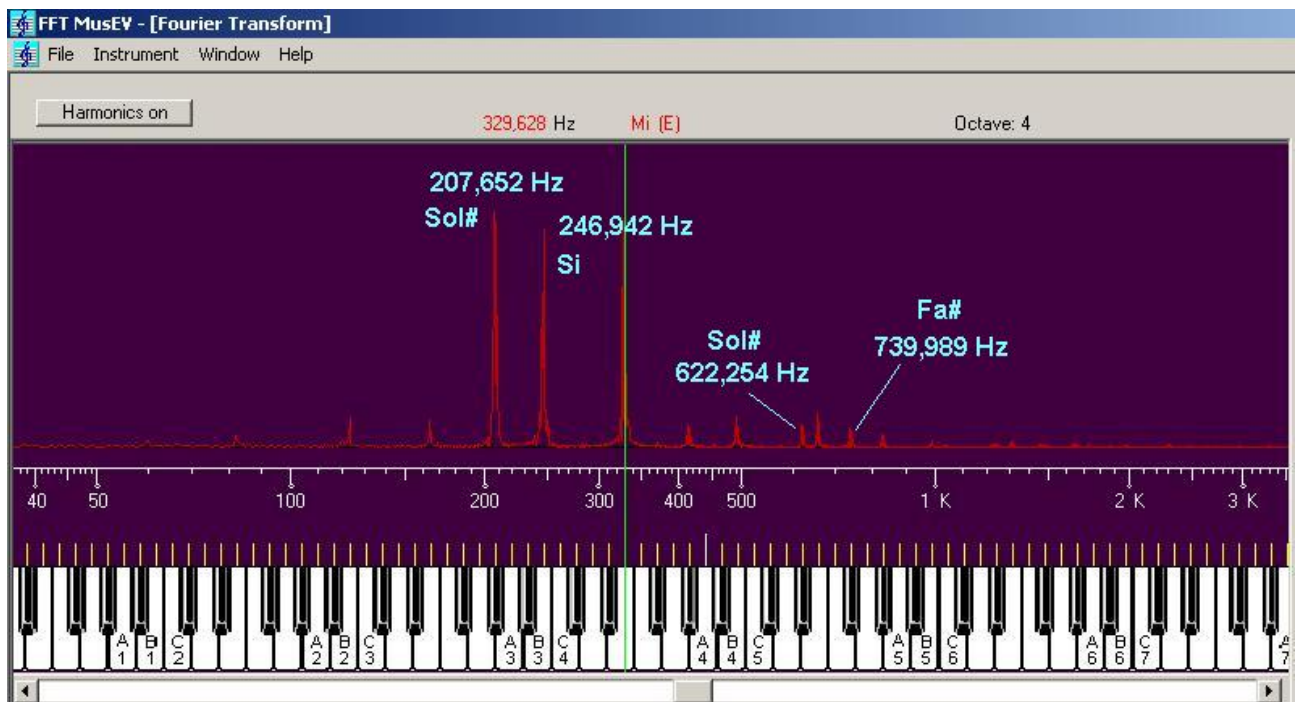


Figura 13. MI maior e harmônicos

Mais uma vez, aparecem picos de freqüências múltiplas das freqüências fundamentais das notas que formam os acordes, além de outras freqüências de amplitude consideravelmente menor que as das notas fundamentais. A harmonia sonora que nos extasia ao ouvir uma música nada mais é que um casamento adequado dessas ondas (notas).

## 5. Agradecimentos

Agradecemos especialmente ao Prof. Luiz Netto pela ajuda na obtenção do software de análise espectral.

## 6. Bibliografia

- Figueiredo, Djairo Guedes, 1986, "Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais", Coleção Euclides, IMPA/CNPq, Rio de Janeiro, Brasil.
- Spiegel, Murray, 1976, "Análise de Fourier, Coleção Schaum, McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, Brasil.
- Farlow, Stanley J., 1993, "Partial Differential Equations for Scientists and Engineers", Dover Publications Inc., New York, USA.
- Santee, D.M., Santos, C.A.P dos, Oliveira, P. J. 1998, "Métodos Numéricos de Integração de Sistemas Dinâmicos Conservativos", - Jornal do Professor de Matemática, Vol.15, N.º 6, pp. 323-329.
- Home Page: <http://members.tripod.com/caraipora/assuntos.htm>

## 6. Direitos Autorais

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

# FOURIER TRANSFORM APPLICATED INTO THE SPECTRAL ANALYSIS OF NOTES AND MUSICAL CHORDS

**Alexandre Carlos da Silva Teixeira**

Universidade Federal de Goiás – Campus de Catalão – Depto. de Matemática – Catalão – GO – Brasil

**Marcelo H. Stoppa**

Universidade Federal de Goiás – Campus de Catalão – Depto. de Matemática – Catalão – GO – Brasil  
mhstoppa@brturbo.com

**Resumo.** *This work stand out interaction between the mathematics and music showing the applicability of the Fourier Transform as tool of analysis for basic note identification and its harmonicas into musical chords. The formulation of the Fourier Transform is presented and after that, it is carried through a spectral note analysis and recorded chords by means of the use of a electronic keyboard and with the aid of a spectral analysis software.*

**Key-words.** *Inverse Fourier Transform, Music, Spectral Analysis.*